Tópicos em Séries

Paulo Rafael Bösing[1]

[1]Universidade Federal da Fronteira Sul

Semana Acadêmica de Matemática

Definição de Sequência

Definition

Uma sequência é uma função cujo domínio é os $\mathbb{N}$.

Remark

- *Descrição familiar/informal: é uma lista ordenada de números reais.*
- *Dado $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n)$ é o n-ésimo termo da sequência.*
- *O que acontece no início da lista/sequência, tem menos importância. O objetivo da análise é o "comportamento" do "rabo infinito" da sequência.*

Remark

Veja gráfico

Uma das definições mais importante da análise

Definition

Uma sequência (a_n) converge para um número real a, se, para todo número positivo ϵ, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon$, sempre que $n \geq N$.

Definition

(Topológica) Uma sequência (a_n) converge para um número real a, se, para qualquer ϵ-vizinhança de a, existe um ponto na sequência depois do qual, todos os termos da sequência estão na ϵ-vizinhança de a.

Example

Considere a sequência a_n, em que $a_n = 1/\sqrt{n}$.

Theorem

O limite de uma sequência, quando ele existe, é único.

Definition

Uma sequência que não converge é dita ser divergente.

Example

Seja (a_n), em que $a_n = (-1)^n$.

Definition

Uma sequência (a_n) *é dita ser limitada, se existe um número* $M > 0$ *tal que,* $|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem

Toda sequência convergente é limitada.

Remark

Propriedades algébricas do limite.

Definition

Uma sequência (a_n) *é dita ser crescente se* $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$*, e é dita ser decrescente se* $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$*. Uma sequência é dita ser monótona se ela é crescente ou decrescente.*

Theorem

(Teorema da Convergência Monótona) Se uma sequência é monótona e limitada, então ela é convergente.

Definição de Séries Numéricas

Definition

Seja (a_n) uma sequência. Uma série (numérica) infinita é uma expressão formal da formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Definition

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a sequência de somas parciais (s_m) é dada por

$$s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m.$$

Dizemos que a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para L, se a sequência (s_m) converge para L. Neste caso escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$.

Remark

Veja gráfico

Definition

Seja (a_n) *uma sequência e seja* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *com* $n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots\ \in \mathbb{N}$. *Então, a sequência*

$$(a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ a_{n_4}, \ldots)$$

é chamada de subsequência de (a_n) *e é denotada por* (a_{n_k}), *em que* $k \in \mathbb{N}$.

Theorem

Seja (a_n) *uma sequência que converge para* L, *então, toda subsequência* (a_{n_k}) *de* (a_n) *também converge para* L.

Corollary

Uma sequência que possui duas subsequências convergindo para limites distintos é divergente.

Theorem

(Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada tem uma subsequência convergente.

O Critério de Cauchy

Definition

Uma sequência (a_n) *é chamada uma sequência de Cauchy se, para todo* $\epsilon > 0$*, existe um* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_m - a_n| < \epsilon$*, sempre que* $m,\ n \geq N$*.*

Theorem

(Critério de Cauchy) Uma sequência converge, se e somente se, ela é uma sequência de Cauchy.

Somas Infinitas

Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots$$

Temos que a sequência (s_m) das somas parciais é

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1/2,\ s_3 = 5/6,\ s_4 = 7/12$$

Temos aqui $s_1 > s_3 > s_5 > \dots$ e $s_2 < s_4 < s_6 < ldots$. E,

$$s_2 < s_4 < s_6 < \cdots S \cdots < s_5 < s_3 < s_1$$

Em que $7/12 < S < 5/6$. Somando umas centenas de termos temos que $S \approx 0.69$.

Remark

Veja gráfico

Estamos “atentados a escrever”

$$S = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots \quad (1)$$

Agora, multiplicando (1) por $1/2$, obtemos

$$S/2 = 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - 1/12 + 1/14 - 1/16 + \dots \quad (2)$$

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc}
\frac{S}{2} & = & & + & \frac{1}{2} & & - & \frac{1}{4} & & + & \frac{1}{6} & & - & \frac{1}{8} & & + & \frac{1}{10} & & - & \frac{1}{12} & \\
+S & = & 1 & - & \frac{1}{2} & + \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} & + \frac{1}{5} & - & \frac{1}{6} & + \frac{1}{7} & - & \frac{1}{8} & + \frac{1}{9} & - & \frac{1}{10} & + \frac{1}{11} & - & \frac{1}{12} & \\
\hline
\frac{3S}{2} & = & 1 & & & + \frac{1}{3} & - & \frac{1}{2} & + \frac{1}{5} & & & + \frac{1}{7} & - & \frac{1}{4} & + \frac{1}{9} & & & + \frac{1}{11} & - & \frac{1}{6} & +
\end{array}
$$

Agora considere a série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$. Que é uma série geométrica com $a_0 = 1$ e $q = -1/2$. Logo, usando a fórmula $a_0/(1-q)$. Temos que

$$1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - 1/32 + \ldots = 2/3$$

Nesse caso somando “dois positivos” e “um negativo”, isto é

$$1 + 1/4 - 1/2 + 1/16 + 1/64 - 1/8 + 1/256 + 1/1024 - 1/32 + \ldots$$

as somas parciais tendem a $2/3$.

Example

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Agrupando os termos de uma maneira temos

$$(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 0+0+0+0+\ldots = 0$$

enquanto que agrupando na formal

$$-1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 1+0+0+0+\ldots = 1$$

Conclusion

Manipulações que ***são válidas para configurações finitas, nem sempre são válidas para configurações infinitas***

Example

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Agrupando os termos de uma maneira temos

$$(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 0+0+0+0+\ldots = 0$$

enquanto que agrupando na formal

$$-1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 1+0+0+0+\ldots = 1$$

Conclusion

Manipulações que ***são válidas para configurações finitas, nem sempre são válidas para configurações infinitas***

Soma dupla

Seja uma “matriz infinita” $\{a_{ij}/i,\ j \in \mathbb{N}\}$, em que $a_{ij} = 1/2^{j-i}$ se $i > j$, $a_{ij} = -1$ se $i = j$, e $a_{ij} = 0$ se $j < i$. Isto é

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Como definir

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$$

Para a “matriz infinita” anterior, temos que,

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(0) = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{j-1}}\right) = -2$$

Remark

Séries duplas surgem, por exemplo, da multiplicação de duas séries simples.

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$$

Mas, nesse momento, o lado direito não faz sentido.

Resultados sobre séries

Theorem

(Critério de Cauchy para Séries) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, se e somente se, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_n| < \epsilon$ *sempre que* $n > m > N$.

Theorem

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $(a_n) \to 0$.

Definition

(Série Geométrica) Uma série é chamada geométrica se ela é da formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \tag{3}$$

Theorem

(Série Geométrica) A série geométrica (3) é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Theorem

(Teste da Comparação) Assuma que (a_n) *e* (b_n) *são sequências que satisfazem* $0 \leq a_n \leq b_n, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

- *(i) Se* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*
- *(ii) Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverte, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Theorem

(Teste da Convergência Absoluta) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Definition

Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.
Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente.

Definition

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é chamada de um rearranjo de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_{f(k)} = a_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Theorem

Se uma série converge absolutamente, então, qualquer rearranjo desta série converge para o mesmo limite.

Theorem

(Teste da Razão) Dado uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n \neq 0$. Se $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

Remark

Outros testes

Produtos Infinitos

O produto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 b_2 b_3 \ldots$$

Nesse caso, consideramos os produtos parciais

$$p_m = \prod_{n=1}^{m} b_n = b_1 b_2 b_3 \ldots b_m$$

Example

Em 1655, John Wallis obteve a fórmula

$$\left(\frac{2.2}{1.3}\right)\left(\frac{4.4}{3.5}\right)\left(\frac{6.6}{5.7}\right)\left(\frac{8.8}{7.9}\right)\ldots = \frac{\pi}{2}$$

Soma Dupla

Em nosso exemplo vimos que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right) \neq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$

Vamos considerar as “somas parciais” obtidas a partir da soma de “retângulos/matrizes”. Para $m,\ n \in \mathbb{N}$, seja

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Interesse quando $m = n$. Pois nesse casso temos uma sequência (s_{nn}). Se (s_{nn}) converge, “gostaríamos” de escrever

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \lim_{n\to\infty} s_{nn}.$$

Theorem

Seja $\{a_{ij}\ / i,j\ \in \mathbb{N}\}$ *uma "matriz infinita" de números reais. Se*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$$

converge, então ambas

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$$

convergem para o mesmo valor. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} s_{nn} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$$

Conclusão

A convergência absoluta é uma propriedade “altamente” desejável quando manipulamos séries. Pois, se a série é absolutamente convergente, podemos “tratar” somas infintas como se fossem somas finitas.
Por outro lado, convergência condicional é extremamente patológica. No caso de rearranjos, não apenas não há garantias que elas (as séries rearranjadas) convergem para o mesmo limite, como é possível para qualquer $r \in \mathbb{R}$, obter um rearranjo da série que converge para r.

Remark

Saber o valor do limite de uma série convergente é uma exceção. Em geral, somente determinamos se ela converge ou diverge.

Algumas Aplicações

Theorem

(Euler) Para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - log(n)\right) = \gamma$$

em que γ é uma constante positiva chamada de constante de Euler-Mascheroni. (Algébrico ou transcendente?? Irracional ou não???)

Theorem

$$e = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

Theorem

O número e é irracionoal

Theorem

(Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Sequências de Funções

Definition

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja f_n uma função definida em um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. A sequência (f_n) é chamada de sequência de funções.

Example

Considere (f_n) em que $f_n(x) = \frac{(x^2+nx)}{n}$ em todo $\mathbb{R}$.

Example

Considere (g_n) em que $g_n(x) = x^n$ no conjunto $A = [0,\ 1]$.

Remark

Veja gráficos.

Definition

A sequência de funções (f_n) converge pontualmente em A para uma função f se, para todo $x \in A$, a sequência numérica $(f_n(x))$ converge para $f(x)$. Neste caso, escrevemos

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

.

Example

Considere (f_n) em que $f_n(x) = \frac{(x^2+nx)}{n}$ em todo $\mathbb{R}$. Como

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} \frac{(x^2+nx)}{n} = lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^2}{n} + x\right) = x$$

Então, (f_n) converge pontualmente para $f(x) = x$ em $\mathbb{R}$.

Example

Considere (g_n) em que $g_n(x) = x^n$ no conjunto $A = [0,\ 1]$. Temos que, se $0 \leq x < 1$, então $x^n \longrightarrow 0$ e, se $x = 1$, então $x^n \longrightarrow 1$. Desse modo (g_n) converge pontualmente para g em $[0,\ 1]$, em que $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Definition

(Convergência Uniforme) Seja (f_n) uma sequência de funções definidas em um conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Então, (f_n) converge uniformemente em A para uma função limite f definida em A, se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ sempre que $n \geq N$ e $x \in A$.

Example

Considere (g_n) em que $g_n(x) = \frac{1}{n(x^2+1)}$ em $\mathbb{R}$. Podemos ver que $lim(g_n(x)) = 0$. De modo que $g(x) = 0$ é o limite pontual da sequência (g_n). Essa convergência é uniforme? Como $\frac{1}{(x^2+1)} \leq 1, \; \forall \, x \in \mathbb{R}$. Temos que,

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{n(x^2+1)} - 0 \right| \leq \frac{1}{n}$$

Então, dado $\epsilon > 0$, escolhemos $N > 1/\epsilon$ (que não depende de x). Segue que, $n > N$ implica que
$|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} < \epsilon \;\; \forall \, x \;\; \in \mathbb{R}$. Logo, a convergência é uniforme.

Theorem

(Continuidade do Limite) Seja (f_n) uma sequência de funções definidas em $A \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente em A para uma função f. Se cada f_n é contínua em $c \in A$, então f é contínua em c.

Theorem

(Diferenciabilidade do Limite) Assuma que $(f_n) \to f$ pontualmente em um intervalo fechado $[a,\ b]$, e que cada f_n é diferenciável. Se (f_n') converge uniformemente em $[a,\ b]$ para uma função g, então a função f é diferenciável e $f' = g$.

Séries de Funções

Definition

Dada uma sequência de funções (f_n), uma série de funções é uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

Remark

Veja gráfico.

Definition

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja f_n e f funções definidas em um conjunto $A \subset \mathbb{R}$. A série infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

converge pontualmente em A para $f(x)$ se a sequência $(s_k(x))$ de somas parciais definidas por

$$s_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)$$

converge pontualmente para $f(x)$. A série converge uniformemente em A para f se a sequência $(s_k(x))$ converge uniformemente em A para $f(x)$.

Séries de Potências

Definition

Uma série de funções da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

é chamada de série de potência

Passando por:

- Teorema da continuidade termo por termo;
- Teorema da diferenciabilidade termo por termo;
- Teorema de Abel;
- Outros resultados.

chegamos ao resultado:

Theorem

Assume que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge em um intervalo* $A \subset \mathbb{R}$*. A função* f *é contínua em* A *e é diferenciável em qualquer aberto* $(-R,\ R) \subseteq A$*. E a derivada é dada por* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$*. Além disso,* f *é infinitamente diferenciável (termo por termo).*

Em resumo:
Apesar da soma infinita, podemos manipular séries de potências

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

"mais ou menos" como se fossem polinômios no seu intervalo de convergência.
No seu intervalo de convergência, a série de potência é contínua e infinitamente diferenciável, a as sucessivas derivadas ou antiderivadas podem ser obtidas termo por termo - como se faz com polinômios.

Da série (numérica) geométrica, temos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \qquad |x| < 1 \tag{4}$$

Daí, por exemplo, temos que $2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$ e
$3/4 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1/3)^n$
Derivando a série (4), obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots, \qquad |x| < 1 \tag{5}$$

Tomando $x = 1/4$ obtemos,
$4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots$.

Integrando a série (4), obtemos

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots, \qquad |x| < 1 \tag{6}$$

Tomando $x = 1/2$, como $log(1/2) = -log(2)$, obtemos

$$\log(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \dots$$

Substituindo x por $-x^2$ em (4) obtemos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots, \qquad |x| < 1 \tag{7}$$

Usando o fato que $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ e que $\arctan(0) = 0$, integrando (7) obtemos

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots, \qquad |x| < 1 \tag{8}$$

Tomando $x = 1$ em (7) temos o interessante resultado (fórmula de Leibniz para π)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots.$$

Question: Podemos encontrar séries de potências para outras funções elementares como $\sin(x),\ \cos(x),\ \exp(x), \sqrt{1+x}, \dots$?

Série de Taylor

Theorem

Se f tiver uma representação em série de potência, isto é,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

em algum intervalo centrado em zero. Então,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Theorem

(Teorema do Resto de Lagrange) Seja f *uma função diferenciável* $N+1$ *vezes em* $I = (-R,\ R)$*. Defina* $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ *para* $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ *e seja*

$$s_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N.$$

Dado $x \neq 0$ *em* I*, existe um ponto* c *satisfazendo* $|c| < |x|$ *onde a função erro* $E_N(x) = f(x) - s_N(x)$ *satisfaz*

$$E_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

Example

Como $a_0 = \sin(0) = 0$, $a_1 = \cos(0) = 1$, $a_2 = -\frac{\sin(0)}{2!} = 0$, $a_3 = -\frac{\cos(0)}{3!} = -\frac{1}{3!}, \ldots$. E, $E_N(x) \to 0$ uniformemente em $[-R,\ R]$ para um arbitrário R, temos que a série de potências de $\sin(x)$ é

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots, \qquad \forall x \quad (9)$$

Remark

Veja gráfico.

Example

Derivando a série do $\sin(x)$, obtemos

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots, \qquad \forall x \quad (10)$$

Example

Para $x \in \mathbb{R}$, a série de potências de $\exp(x)$ é:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \qquad \forall x \tag{11}$$

Em particular, tomando $x = \theta i$ (Isso é válido???) obtemos a fórmula de Euler

$$e^{\theta i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Tomando $x = 1$, obtemos
$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots.$

Remark

Veja gráfico.

Derivando (11) (termo a termo)

$$(\exp(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = 0+1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots = \exp(x) \quad \forall x$$

Substituindo x por $-x^2$ em (11)

$$\exp(-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots, \qquad \forall x \tag{12}$$

Integrando

$$\int e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = c + x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \ldots, \quad \forall x$$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$, definimos o número binomial generalizado $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right)$ por $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ 0 \end{array} \right) = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Theorem

(Newton - generalizado) Para $\alpha \neq 0$ e $|x| < 1$, temos

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n$$

Remark

Veja gráfico.